**УДК 656.212: 519.6**

А. Ю. ПАПАХОВ[1*]

[1*]Каф. «Управление эксплуатационной работой», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010, г. Днепр, Украина, тел + 38-067-524-43-22, эл. почта papahov0362@mail.ru, ORCID 0000-0003-2357-8158

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА ПРИ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ВАГОНОПОТОКОВ

**Целью** данной работы является разработка с помощью функций множества математической модели организации вагонопотоков в грузовые поезда с учетом ограничений по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности перегонов. Основной **задачей исследования** является распределение грузовых поездопотоков на сети железных дорог с учетом ограничений по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности перегонов. **Объектом исследования** выступает сеть железнодорожного полигона с вершинами на технических станциях. **Предметом исследования** является распределение грузовых поездопотоков по железнодорожной сети с учетом ограничений по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности перегонов. **Методика.** С помощью использования функций множества и производной от функции множества по мере удалось задачу целочисленного линейного программирования в булевых переменных свести к обычной оптимизации по множителям Лагранжа. **Научная новизна** заключается в приведении задачи линейного программирования в булевых переменных с помощью функций множества к поиску множества минимальной целевой функции при некоторых ограничениях на элементы данного множества. Доказана применимость метода Лагранжа в задачах на условный экстремум в терминах функций множества. Получены необходимые условия для решения задачи расчета плана формирования одногруппных грузовых поездов при некоторых ограничениях с использованием векторной оптимизации. **Практическая значимость.** В результате предложенного подхода разработан экономико-математический вариант рациональной организации вагонопотоков в грузовые поезда с учетом ограничений по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности перегонов. Данный подход позволяет сократить множество расчетных вариантов плана формирования одногруппных сквозных поездов до наиболее перспективной организации их в поезда, которые могут принести максимальный эффект.

*Ключевые слова*: поездопоток, теория функций множества, векторная оптимизация.

## Постановка проблеми

Переход от плановой экономической среды, для которой были отлажены системы организации вагонопотоков и управления перевозками, к рыночной, с четко выраженной долей частной собственности и повышенной финансовой ответственностью железных дорог за свою деятельность, ухудшил состояние железнодорожного транспорта.

Расчет базового плана формирования поездов в увязке с графиком движения поездов и расчетом потребности в локомотивах, локомотивных бригадах и парке вагонов занимает центральное место в современной системе организации вагонопотоков. При этом надо иметь в виду, что с изменением экономических взаимоотношений в стране и переориентации задач железнодорожного транспорта, известная теория расчета организации вагонопотоков устарела. Даже более того – старые принципы противоречат практике и тормозят развитие отрасли.

Действует закрепленный в нормативных указаниях по организации вагонопотоков постулат: «оптимальный план формирования должен обеспечивать минимум вагоно-часов при накоплении вагонов и их переработке» [1]. При этом подразумевается, что через вагоно-часы можно выразить приведенные денежные затраты. Но с существующим критерием оптимизации непосредственно связано не более 9-10 % всех эксплуатационных расходов и 5-7 % затрат на основные производственные фонды.

В последнее время в научной печати чаще стали говорить о необходимости оценки плана формирования непосредственно в денежном выражении. Необходимо использовать новые критерии, учитывающие условия эксплуатационной работы в рыночной среде. Они должны быть ориентированы как на снижение расходов железных дорог, так и на повышение доходов, в том числе за счет уменьшения штрафных выплат за несвоевременную доставку грузов.

Существующие математические подходы дают возможность использовать методы интерактивного решения многокритериальных задач, которые строят субъективную функцию полезности, отражающую реальное состояние дел на данном участке сети железных дорог, а не формальную модель приведенных затрат.

Вместе с тем, из множества рациональных вариантов возможно вычленить такие, которые будут наиболее выгодны с экономической точки зрения. При этом в качестве критерия должна выступать прибыль, полученная отраслью, а не сравнительная стоимость (или себестоимость) того или иного варианта организации вагонопотоков.

Развитие вычислительной техники, развитие теории постановки и решения задач математического программирования (включая линейное, нелинейное, целочисленное, динамическое программирование) привели к появлению группы новых методов расчета. Сюда относятся предложения [2] (рассмотрение плана формирования как задачи целочисленного программирования с булевыми переменными).

**Анализ последних исследований.**

Порядок направления и организации вагонопотоков является важной технологической задачей эксплуатационной работы железнодорожного транспорта [3]. Организация вагонопотоков в грузовые поезда определяет уровень загрузки технических средств транспорта, распределение сортировочной и маневровой работы между станциями и пунктами отправления, а также назначение грузовых поездов [4]. С этой целью порядок направления вагонопотоков и организация их в грузовые поезда ориентируется на следующие экономические показатели:

– снижение расходов железной дороги, связанных с подводом порожних вагонов в пункты погрузки, переработкой и простоем вагонов на станциях, выполнение технических и грузовых операций, пропуск поездов по участкам, содержание технической инфраструктуры и штата;

– повышение доходов за счет снижения штрафных выплат за несвоевременную доставку грузов, а не подачу порожних вагонов и недоступен перевозки.

Известные методики организации вагонопотоков в одногруппные сквозные поезда в настоящее время не учитывают:

– ограничения по перерабатывающей способности станций;

– нелинейного изменение затрат по станциям, связанным с ростом объемов перерабатываемого вагонопотока;

– двукратную переработку вагонов углового потока на двусторонних сортировочных станциях;

– условия продвижение вагонопотоков по параллельным ходам [5].

К последним работам в данной области относятся исследования ПГУПС – предложения [4] по оценке вариантов плана формирования поездов по нескольким натуральным критериям.

Распространенный критерий оптимизации плана формирования поездов – минимум затрат на накопление вагонов и их переработку - отражает лишь небольшую часть фактических затрат, связанных с перевозочным процессом. Критерий оптимизации плана должен быть тесно связан прежде всего с работой локомотивов, использованием путевого развития станций и участков.

Всегда при рассмотрении повышения эффективности организации вагонопотоков, возникает задача о повышении их транзитности. В математическом плане данная задача известна как задача о ранце (рюкзаке), которую впервые рассмотрел Д. Данцинг [6].

Формальная запись задачи о ранце имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{1}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b, \tag{2}$$

где $x_j \in \{0,1\}$, $j = \overline{1,n}.$

В дальнейшем эта задача обобщалась и в настоящее время вариант ее обобщения известен как многомерная задача о ранце.

В этом обобщении условие (2) заменяется на следующее

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Детальный обзор этих задач приведен в работе [7], где рассматривается задача с несколькими ранцами.

В наиболее общем виде многомерная задача о ранце представляет собой задачу векторной оптимизации [8]

$$\max\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j,\ i = \overline{1,k}\right) \tag{4}$$

при условии типа (3).

Необходимо отметить работу [9], в которой задача сетевого плана формирования поездов формируется в виде линейного программирования в булевых переменных.

**Цель**

Все множество переменных задач линейного программирования в терминах булевых переменных предлагается с использованием функций множества свести к обычной оптимизации по множителям Лагранжа для разработка математической модели организации вагонопотоков в грузовые поезда на основании векторной оптимизации с учетом ограничений по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности перегонов.

Основной **задачей исследования** является организация вагонопотоков на сети железных дорог в одногруппные сквозные поезда с учетом ограничений по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности перегонов.

**Изложение основного материала**

Методика. Функции множества. Пусть $\Omega$ некоторое множество, а $\aleph(\Omega)$ – набор подмножеств множества $\Omega$, обладающее следующими свойствами:

– если $A$ и $B$ принадлежат $\aleph(\Omega)$, то их объединение $A \cup B \in \aleph(\Omega)$;

– если $A$ и $B$ принадлежат $\aleph(\Omega)$, то их разность $A \setminus B \in \aleph(\Omega)$;

– само множество $\Omega$ тоже принадлежит $\aleph(\Omega)$.

Другими словами множество $\aleph(\Omega)$ является алгеброй [10].

*Определение 1*. Отображение $\aleph(\Omega)$ на действительную ось $R$ по некоторому правилу $F$ будем называть функцией множества. Среди всевозможных функций множества выделим такую, которая обладает следующими свойствами:

$$\forall A \in \aleph(\Omega) \rightarrow \mu(A) \geq 0;$$

$\mu(A) = 0$, тогда и только тогда, когда $A = \varnothing$;

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$

Если $\{B_n\}, n = 1, 2...$ некоторая последовательность сходящаяся к $B$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B)$.

*Определение 2*. Функцию $\mu(A)$, обладающую указанными свойствами будем называть мерой на $\aleph(\Omega)$.

Данное определение меры несколько отличается от классического определения изложенного в работе [11]. Основное отличие отражено во втором свойстве, когда мера равна нулю.

Производная функции множества по мере [12].

Если имеем последовательность $\{B_n\}, n = 1, 2...$ каждый элемент которой принадлежит $\aleph(\Omega)$, $F(A)$ функция множества, то рассматривается последовательность чисел

$$a_n = \frac{F(A\Delta B_n) - F(A)}{\mu(A\Delta B_n) - \mu(A)},$$

где $\sqcup$ – операция симметрической разности двух множеств.

*Определение 3*. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$ то этот предел называется производной функции множества $F(A)$ по мере $\mu$ на последовательности $\{B_n\}, n = 1, 2...$ и обозначается в виде:

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}} \triangleq a. \qquad (5)$$

В работе [12] доказана теорема существования данной производной на сходящейся последовательности $\{B_n\}$ если функция $F(A)$ является непрерывной, т.е. имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} F(A_n) = F(A),$

где последовательность $\{A_n\}$ произвольная сходящаяся к $A$, и тогда имеет место

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B} = \frac{F(A\Delta B_n) - F(A)}{\mu(A\Delta B_n) - \mu(A)}. \qquad (6)$$

Теорема [12]. Если $A_* \in \aleph(\Omega)$, такое что $F(A_*) \leq F(A)$ для любого $A \in \aleph(\Omega)$ и существует производная, тогда с необходимостью имеет место

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to B\subseteq A_*} \leq 0. \qquad (7)$$

Таким образом, условие (7) является необходимым для определения множества $A_*$, при котором функция множества принимает минимальное значение.

Метод Лагранжа для функций множества.

Основным методом решения задач на условный экстремум является метод Лагранжа [13].

В общем виде задача на условный экстремум, в терминах функций множества представляет собой

$$F(A)\to\min \tag{8}$$

при условии

$A\in U=\left\{A\in\aleph(\Omega):G_i(A)\le 0, i=\overline{1,m}\right\}.$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(A,\lambda)=F(A)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i(A) \tag{9}$$

Покажем, что существуют такие $\lambda_i^*\ge 0,$ что задача (8) сводится к поиску минимума функции Лагранжа (9).

Определение. Пара $\langle A_*,\lambda^*\rangle$ называется седловой парой функции Лагранжа, если имеет место

$$L(A_*,\lambda)\le L(A_*,\lambda^*)\le L(A,\lambda^*), \tag{10}$$

Лемма. Пара $\langle A_*,\lambda^*\rangle$ является седловой тогда и только тогда, когда

$$L(A_*,\lambda^*)\le L(A,\lambda^*), \tag{11}$$

$$\lambda_i^* G_i(A_*)=0, i=\overline{1,m},\ A_*\in U. \tag{12}$$

Теорема. Если пара $\langle A_*,\lambda^*\rangle$ – седловая пара функции Лагранжа, то она является решением задачи (8).

Доказательство. Лемма. Необходимость

Пусть пара $\langle A_*,\lambda^*\rangle$ принадлежит $\aleph(\Omega)\times\Lambda$, где $\Lambda=\left\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m:\lambda_i\ge 0, i=\overline{1,m}\right\}$, тогда соотношение (11) представляет собой правое неравенство (10). Чтобы получить (12) изменим левое неравенство (10) с учетом функции Лагранжа:

$$F(A_*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i(A_*)\le F(A_*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* G_i(A_*)$$

и получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i^*-\lambda_i\right)G_i(A_*)\ge 0$$

В этом неравенстве положим $\lambda_i=\lambda_i^*+1,$ а остальное $\lambda_j=\lambda_j^*,$ тогда имеем $-G_i(A_*)\ge 0,$ откуда получаем $G_i(A_*)\le 0.$ В силу произвольности *i* имеем, что $A_*\subset U,$ что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть пара $\langle A_*,\lambda^*\rangle\in\aleph(\Omega)\times\Lambda$ и выполняются соотношения (11) и (12). Покажем, что эта пара является седловой. Из (11) следует правые неравенства (10), а из условия (12) следует, что $A_*\subset U,$ т.е. $G_i(A_*)\ge 0,$ но $\lambda_i^*=0,$ т.е. имеем (13).

Из (13) получаем

$$\left(\lambda_i^*-\lambda_i\right)G_i(A_*)=-\lambda_i G_i(A_*)\ge 0$$

для всех $\lambda_i\ge 0,$ для которых $G_i(A_*)<0.$

Складывая полученные неравенства имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i^*-\lambda_i\right)G_i(A_*)\ge 0,$$

для всех $\lambda\in\Lambda$ или

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i(A_*)\le\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* G_i(A_*).$$

Добавляя к обеим частям данного неравенства $F(A_*)$ получаем левую часть (10), что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Из условия (12) имеем $A_*\subset U,$ т.е. ограничения (8) выполнены.

Так как $L(A_*,\lambda^*)=F(A_*)$, то неравенство (11) принимаем в виде

$$F(A_*)=L(A_*,\lambda^*)\le F(A)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* G_i(A)$$

и учитывая, что $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* G_i(A)\le 0,$ получаем $F(A_*)\le F(A)$ при всех $A\subset U$, что и доказывает теорему.

Таким образом, изложенное доказывает применимость метода Лагранжа к задачам на условный экстремум, сформированных в терминах функций множества.

Для решение поставленной задачи можно использовать программную среде Maple, которая позволяет найти оптимальное решение плана формирования одногруппных сквозных поездов.

Все это создает условия для оценки и расчета плана формирования на новой теоретической базе, которую возможно применить в новых экономических условиях с учетом развивающихся информационных технологий управления транспортными потоками.

При этом внастоящее время представляется необходимым любое управленческое решение по регулированию пропуска вагонопотоков, а также различные варианты организации вагонопотоков в поезда и различные маршруты их передвижения оценивать с точки зрения влияния на конечный результат. Под последним следует понимать прибыль, получаемую от перевозки грузов. При этом варианты организации вагонопотоков изменяют различные показатели, по которым оценивают деятельность дороги и отрасли. Зачастую на практике по предпочтению того или иного показателя принимается решение, которое с точки зрения «глобального» критерия (прибыли) не является эффективным.

**Вывод**

В работе предложен новый метод решения задач ранцевого типа, позволяющий отказаться от булевых переменных и решать обычную задачу оптимизации по множителям Лагранжа, что в отличие от существующих методов, позволяет существенно адаптировать задачи векторной оптимизации к задачам рациональной организации вагонопотоков при ограничениях по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности участков.

Таким образом, предложенный метод и соответствующее программное обеспечение для решения задач ранцевого типа, применяемых к задачам рациональной организации вагонопотоков при ограничениях по перерабатывающей способности технических станций и пропускной способности участков. Численная реализация предложенного метода показала адекватность предложенного алгоритма и подтверждает правильность математического описания решения задач ранцевого типа.

Задача выбора рациональной системы организации вагонопотоков с учетом технико-технологической структуры сети железных дорог формулируется как многокритериальная задача, которая технически может быть решена в условиях достаточного информационного обеспечения в реальном режиме времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Інструктивні вказівки з організації вагонопотоків на залізницях України : Затв. Наказом Укрзалізниці 29.12.2004 № 1028-ЦЗ. – С. 76.

2. Папахов, О. Ю. Елементи вдосконалення методики розрахунків плану формування поїздів / О. Ю. Папахов, О.М. Логвінов //Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені В. Лазаряна. – 2006. – № 12. – С. 91-93.

3. Ломотько, Д. В. Удосконалення системи управління парком вантажних вагонів на залізницях України в нових умовах / Д. В. Ломотько, В. М. Запара, В. В. Кулешов, А. В. Кулешов // Збірник наукових праць УкрДАЗТ. – 2010. – Вип. 119. – С. 28-35.

4. Осьминин, А. Т. Рациональная организация вагонопотоков на основе методов многокритериальной оптимизации : дис. … д-ра техн. наук : 05.22.08 / Осьминин Александр Трофимович. – Самара, 2000, – 260 с.

5. Логвінова, Н. О. Моделювання роботи залізничної інфраструктури з паралельними ходами / Н. О. Логвінова, Р. В. Вернигора, О. Ю. Папахов// Науковий Вісник НГУ. – 2013. – Вип. 3. – С. 93-102.

6. Данциг, Дж. Б. Линейное программирование, его применения обобщения /Дж. Б. Данциг. – Москва : Прогресс, 1966. – 600 с.

7. Федорин, А. Н. Многокритериальные задачи ранцевого типа; разработка и сравнительный анализ алгоритмов : автореф. дис. … канд. техн. наук : 05.13.18 / Федорин Андрей Николаевич. – Нижний Новгород, 2010. – 24 с.

8. Ногин, В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход / В. Д. Ногин. – Москва : Физматлит, 2002. –144 с.

9. Дувалян, С. В. Разработка алгоритмов и программ расчета сетевого плана формирования поездов : отчет по научно-исследовательской работе. – Москва : ВНГИЦ, 1978. – 120 с.

10.Ван-дер-Варден, Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван-дер-Варден. – Москва : Мир, 1976. – 648 с..

11.Халмош П. Теория меры / Пер. с англ. Д. А. Василькова; под ред. С. В. Фомина. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1953. – 282 с

12.Босов, А. А. Функции множества и их применение / А. А. Босов – Днепродзержинск : Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.

13.Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – Москва : Наука, 1980. – 518 с.


*Статья рекомендована к публикации д.т.н., проф. Тараном И. А. (Украина)*


Поступила в редколлегию 10.11.2016.
Принята к печати 12.11.2016.

О. Ю. ПАПАХОВ

# ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДА ФУНКЦІЇ БЕЗЛІЧІ ПРИ РАЦІОНАЛЬНІЙ ОРГАНІЗАЦІЇ ВАГОНОПОТОКІВ

**Метою** даної роботи є розробка за допомогою функцій безлічі математичної моделі організації вагонопотоків в вантажні поїзда з урахуванням обмежень по переробній спроможності технічних станцій та пропускній спроможності перегонів. Основною **задачею дослідження** є розподіл вантажних поїздопотоків на мережі залізниць з урахуванням обмежень по переробній спроможності технічних станцій та пропускній спроможності перегонів. **Об'єктом дослідження** виступає мережа залізничного полігону з вершинами на технічних станціях. **Предметом дослідження** є розподіл вантажних поїздопотоків по залізничній мережі з урахуванням обмежень по переробній спроможності технічних станцій та пропускній спроможності перегонів. **Методика.** За допомогою використання функцій безлічі і похідною від функції безлічі в міру вдалося задачу цілочисельного лінійного програмування в булевих змінних звести до звичайної оптимізації за множниками Лагранжа. **Наукова новизна** полягає у приведенні задачі лінійного програмування в булевих змінних за допомогою функцій безлічі до пошуку безлічі мінімальної цільової функції при деяких обмеженнях на елементах даної множини. Доведено можливість застосування методу Лагранжа в задачах на умовний екстремум в термінах функцій безлічі. Отримані необхідні умови для вирішення задачі розрахунку плану формування одногрупних вантажних поїздів при деяких обмеженнях з використанням векторної оптимізації. **Практична значимість**. В результаті запропонованого підходу розроблено економіко-математичний варіант раціональної організації вагонопотоків в вантажні поїзда з урахуванням обмежень по переробній спроможності технічних станцій та пропускній спроможності перегонів. Даний підхід дозволяє скоротити безліч розрахункових варіантів плану формування одногрупних наскрізних поїздів з найбільш перспективною організацією їх в поїзда, які можуть принести максимальний ефект.

*Ключові слова:* поїздопотік, теорія функцій безлічі, векторна оптимізація

A. Y. PAPAKHOV

# USING METHOD OF MULTITUDE OF FUNCTIONS RATSYONALNOY ORGANIZATION VAHONOPOTOKOV

The **target** of this work is to develop with the help of set functions of the mathematical model of organization of traffic volumes in the freight trains subject to the restrictions on the processing capacity of technical exchanges and capacity stage abilities. The **main objective** of the study is the distribution of freight poezdopotokov on the railway network, taking into account the restrictions on the processing capacity of technical exchanges and capacity spans. The **object of research** is the railway network polygon with vertices at the service station. The **subject of study** is the distribution of freight by rail network poezdopotokov subject to the restrictions on the processing capacity of technical exchanges and capacity spans. **Methods.** With the use of multiple features and functions derived from a plurality of at least managed to integer linear programming problem in Boolean variables reduced to the usual optimization Lagrange multipliers. **Scientific novelty** consists in bringing the problem of linear programming in Boolean variables with the help of a set of functions to search the set minimum objective function under certain restrictions on the elements of the set. Lagrange proved the applicability of the method in problems on a conditional extremum in terms of a set of functions. The necessary conditions for the solution of the problem of calculating the plan of forming single-group freight trains with certain restrictions with vector optimization. **Practical significance.** As a result, the proposed approach is designed Economics and Mathematics option rational organization of traffic volumes in the freight trains subject to the restrictions on the processing capacity of technical exchanges and capacity spans. This approach reduces the set of calculated plan options through the formation of single-group trains to the most promising organizations in their train, which can bring maximum effect.

*Keywords:* poezdopotok, the theory of multiple functions, vector optimization.