

УДК 519.857: 331.101.1: 330.46: 621.86: 656.078: 658.78

В. Г. ЗАГОРЯНСЬКИЙ<sup>1\*</sup>, М. М. МОРОЗ<sup>2\*</sup>, С. О. КОРОЛЬ<sup>3\*</sup>

<sup>1\*</sup> Каф. «Транспортні технології», Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Університетська, 20, м. Кременчук, Україна, 39600, тел. +38 (050) 874-87-48, ел. пошта zagor\_vlad@ukr.net, ORCID 0000-0002-5607-7571

<sup>2\*</sup> Каф. «Транспортні технології», Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Університетська, 20, м. Кременчук, Україна, 39600, тел. +38 (098) 400-71-48, ел. пошта mykolai.moroz@gmail.com, ORCID 0000-0001-6107-1230

<sup>3\*</sup> Каф. «Транспортні технології», Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, вул. Університетська, 20, м. Кременчук, Україна, 39600, тел. +38 (096) 238-78-52, ел. пошта korserg309@gmail.com, ORCID 0009-0008-4014-3926

## ОПТИМІЗАЦІЯ ВАНТАЖНИХ РОБІТ І РОЗМІЩЕННЯ ТАРНО-ШТУЧНИХ ВАНТАЖІВ В ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБАХ І СКЛАДАХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДІВ ЕРГОНОМІКИ І ТЕОРІЇ СИСТЕМ

**Мета.** Задачі оптимізації розміщення тарно-штучних вантажів (або задачі про завантаження) в обмеженому об'ємі (ємності) характерні для випадків завантаження тарно-штучними вантажами (головним чином, великогабаритними) транспортних контейнерів, кузовів автомобілів, трюмів кораблів у торговому флоті, транспортних літаків, залізничних вагонів, ділянок складського комплексу. При цьому безпечно і ефективно виконання навантажувально-розвантажувальних робіт з тарно-штучними вантажами, в тому числі великогабаритними, в обмеженому просторі безпосередньо пов'язано з урахуванням вимог і використанням методів ергономіки. Метою даної статті є розробка математичної моделі оптимізації розміщення тарно-штучних вантажів (або про їх завантаження) в обмеженому об'ємі (ємності), за допомогою якої здійснюється відбір підмножини одиниць вантажів з максимальною відносною корисністю, дотримуючись при цьому обмеження на сумарний об'єм (або масу) вантажів. **Методика.** Аналіз літературних джерел дозволив встановити, що для моделювання і розв'язання задачі про оптимізацію розміщення вантажів (або про їх завантаження) в обмеженому об'ємі (ємності) раціонально використати один з точних методів розв'язання (метод динамічного програмування), кількість етапів якого дорівнює кількості видів вантажів. В роботі використані метод динамічного програмування, методи теорії систем, лінійної оптимізації. **Результати.** У статті наведена математична модель задачі оптимального розміщення тарно-штучних вантажів (або про завантаження) в обмеженому об'ємі, при чому для випадку розміщення зброї, боєприпасів, озброєння пропонується максимізувати не функцію сумарної вартості (цінності) вантажу, а функцію, яка б враховувала відносну корисність кожного вантажу. Відносну корисність кожного вантажу пропонується визначати експертними методами теорії систем, наприклад, методом Дельфі, який добре формалізований і придатний для комп'ютерної обробки результатів. **Наукова новизна.** Наукова новизна полягає у розробці математичної моделі, яка дозволяє вирішувати задачу оптимального розміщення тарно-штучних вантажів (або про завантаження) в обмеженому об'ємі, причому цільовою функцією оптимізаційної моделі запропоновано сумарну відносну корисність вантажу. **Практична значимість.** Визначені ергономічні вимоги для вантажних робіт з тарно-штучними вантажами в обмеженому просторі (транспортні засоби, приміщення складів). Запропоновано методіку чисельного розрахунку за моделлю (випадок завантаження кузова автомобіля тарно-штучними вантажами). В подальших дослідженнях одержані результати будуть використані для комп'ютерного моделювання за розробленою моделлю з використанням інструменту Пошук Рішення Microsoft Excel.

**Ключові слова:** динамічне програмування, теорія систем, ергономіка, тарно-штучні вантажі, навантажувально-розвантажувальні роботи, розміщення, оптимізаційна модель, складський комплекс.

### Вступ

Задачі складування вантажів відносяться до класу задач управління запасами. Цей клас задач є найбільш характерним для динамічного програмування. Розв'язання цих задач значно спрощується завдяки лінійності цільової функції. За принципом оптимальності Беллмана на кожному етапі оптимальна стратегія визначається

незалежно від стратегій, використаних на попередніх етапах.

При використанні методу динамічного програмування виділяють три його складові: визначення етапів, визначення на кожному етапі варіантів рішення (альтернатив), визначення станів на кожному етапі.

При визначенні етапів доводиться розв'язувати такі задачі, як знаходження співвідношень,

що пов'язують етапи у єдиний процес, а також виявлення інформації, необхідної для отримання допустимих рішень на поточному етапі без повторної перевірки рішень, прийнятих на попередніх етапах.

Під час розміщення зброї, боєприпасів, озброєння раціонально максимізувати не функцію сумарної вартості (цінності) вантажу, а функцію, яка б враховувала відносну корисність кожного вантажу.

### Мета дослідження

Метою дослідження є розробка математичної моделі оптимізації розміщення тарно-штучних вантажів (або про їх завантаження) в обмеженому об'ємі (ємності), за допомогою якої здійснюється відбір підмножини одиниць вантажів з максимальною відносною корисністю, дотримуючись при цьому обмеження на сумарний об'єм (або масу) вантажів.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] розглянуто актуальне питання раціонального розміщення вантажу (на прикладі трубного прокату) на вантажних платформах рухомому складу в системі автомобільних перевезень. Авторами роботи [1] розроблений алгоритм розрахунку схем розміщення трубної продукції різного сортаменту на вантажних платформах автотранспортних засобів з урахуванням властивостей вантажу, параметрів рухомого складу та умов перевезень. Цей алгоритм являє собою сукупність дій щодо вибору, розрахунку та перевірки різних параметрів схеми розміщення (навантаження) труб.

Відзначимо, що така задача має також назву «задача пакування рюкзака» [2–4]. Ця задача має властивість субоптимальної структури, тобто, можна знайти оптимальний розв'язок задачі з  $i$  змінними на основі розв'язку задачі з  $i-1$  змінною. Ця властивість дозволяє застосувати засоби динамічного програмування для розв'язання «задачі пакування рюкзака» [4–6].

Цій проблемі присвячена велика кількість досліджень, зокрема роботи Беллмана Р., Вагнера Г., Дрейфуса С., Хедлі Дж., Хемді Тахи, Бертсекаса Д., Сміта Д, Вентцель О. С., Войтенко М. О., Каліхмана І. Л., Романовського І. В., Бронова С. О. та ін.

Задача про оптимізацію розміщення вантажів виникає, наприклад, під час завантаження транспортних контейнерів, кузовів автомобілів, трюмів кораблів у торговому флоті,

транспортних літаків, залізничних вагонів, ділянок складського комплексу [7–8] тощо.

Задачу про оптимізацію розміщення вантажів (або про завантаження) формулюємо таким чином: є ємність обмеженої місткості, а також вантажі кількох видів, різних (але однакових усередині виду) за розмірами (об'ємом) (або масою) та вартістю [9–11]; потрібно знайти найкраще поєднання цих вантажів, що забезпечує найбільшу відносну корисність всього завантаження.

Відносну корисність кожного вантажу пропонується визначати експертними методами теорії систем, наприклад, методом Дельфі, який добре формалізований і придатний для комп'ютерної обробки результатів [12].

Отримані суми рангів за напрямками (у даному випадку – корисність кожного виду вантажу, якій надається до завантаження) пропонується переводити у відносну корисність за схемою: найменшу суму рангів, яка відповідає найважливішому напрямку, прийняти за одиницю, суми рангів решти напрямків оцінювати, відповідно до їх значень, в долях одиниці.

Відмітимо, що безпечне укладання вантажів, в тому числі великогабаритних, в обмеженому просторі безпосередньо пов'язано з виконанням вимог ергономіки [13]. Навантажувально-розвантажувальні та складські роботи виконуються, як правило, механізованим способом за допомогою навантажувачів або інших вантажопідіймальних засобів, а при незначних обсягах – засобами малої механізації. Засобами механізації завантаження тарно-штучних вантажів є:

- для механізованого завантаження контейнера – автотранспортні засоби з нейтралізаторами вихлопних газів, електронавантажувачі, електровізки;

- для робіт в критичних вагонах – електронавантажувачі з низьким підйомом вил;

- для переміщення і штабелювання в складах – електронавантажувачі з високим підйомом вил, підлогові електроштабелери;

- для обслуговування стаціонарних стелажів у складах – мостові та стелажні крани-штабелери;

- для транспортних операцій в складах – стрічкові, візкові, підвісні конвеєри, електрострички.

### Основний матеріал дослідження

Для математичної моделі, що розробляється, позначимо:  $n$  – кількість видів вантажу;  $x_i$  – кількість одиниць вантажу  $i$ -го ( $i = 1, \dots, n$ ) виду (змінна моделі),  $v_i$  – об'єм (або маса) одиниці

вантажу  $i$ -го виду,  $[V]$  – наявний загальний об'єм (ємність) для розміщення вантажу (або його допустима сумарна маса);  $u_i$  – відносна корисність, яку має одиниця вантажу  $i$ -го виду.

Значення  $x_i$  – ціле і визначається питомими характеристиками (габаритами, вагою)  $v_i$  вантажів відповідного  $i$ -го виду з урахуванням обмежень на місткість ємності для вантажів  $[V]$ .

Цільова функція задачі (сумарна відносна корисність від усіх  $n$  видів вантажів):

$$L(X) = u_1x_1 + u_2x_2 + \dots + u_nx_n = \sum_{i=1}^n u_i x_i \rightarrow \max \quad (1)$$

за обмежень

$$\begin{aligned} v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_nx_n &= \sum_{i=1}^n v_i x_i \leq [V]; \\ x_i &\geq 0; \\ x_i &\text{ – цілі числа} \end{aligned} \quad (2)$$

Кількість  $n$  видів вантажу визначає кількість етапів метода динамічного програмування.

На кожному етапі розглядається варіант завантаження лише вантажів одного виду (на додаток до вже завантажених предметів на попередніх етапах).

На кожному  $i$ -му етапі розглядаються варіанти розв'язку, які представляються кількістю одиниць вантажу  $i$ -го виду  $x_i$ , що підлягають завантаженню.

$$\text{Тому } 0 \leq x_i \leq \left\lfloor \frac{[V]}{v_i} \right\rfloor, \text{ де } \left\lfloor \frac{[V]}{v_i} \right\rfloor \text{ – ціла частина}$$

відношення в квадратних дужках. При цьому розглядають усі варіанти – від варіанту завантаження, коли вантажі цього виду взагалі не завантажуються, до повного завантаження лише вантажами цього виду, а також усі проміжні варіанти.

Параметр  $V_i$  на аналізованому  $i$ -му етапі характеризує завантажений сумарний об'єм (або маса) вантажів усіх видів, завантажених раніше і завантажуваних на даному етапі.

Цей стан має задовольняти умові

$$\sum_{i=1}^n v_i x_i \leq [V], \quad (3)$$

де  $n$  – кількість вже завантажених вантажів.

Розв'язок задачі про завантаження у загальному вигляді відшукується в рекурентній формі, тому що розв'язок на кожному новому етапі залежить від розв'язку на попередньому етапі.

Розв'язок починаємо з останнього етапу ( $i = n$ ) і рухаємося до першого етапу ( $i = 1$ ).

Позначимо через  $L_i(V_i)$  максимальну сумарну відносну корисність від раніше розглянутих етапів:  $i = i + 1, \dots, n$ .

Тоді рекурентна формула для цього рішення через знайдене раніше

$$\begin{aligned} L_i(V_i) &= \max \{u_i x_i + L_{i+1}(V_{i+1})\}, \\ i &= n, n-1, \dots, 1 \\ x_i &= 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{[V]}{v_i} \right\rfloor \\ V_i &= 0, 1, \dots, [V] \end{aligned} \quad (4)$$

де для початкового випадку  $L_n(V_n)$ , коли формально необхідно знати  $L_{n+1}(V_{n+1})$ , приймаємо  $L_{n+1}(V_{n+1}) = 0$ .

У правій частині формули вказана функція пошуку та виділення максимуму серед варіантів розв'язку. Вона працює на таких етапах:

– на етапі  $i = n$  завантажуються вантажі  $n$ -го виду;

– на етапі  $i = n - 1$  завантажуються вантажі  $(n-1)$ -го виду на додаток до раніше завантажених вантажів  $n$ -го виду;

– на етапі  $i = n - 2$  завантажуються вантажі  $(n-2)$ -го виду на додаток до раніше завантажених вантажів  $n$ -го та  $(n-1)$ -го видів тощо.

На кожному наступному етапі (при переході до завантаження вантажів нового виду) здійснюється перебір варіантів їх кількості:

$$x_i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{[V]}{v_i} \right\rfloor \quad (5)$$

і для цих випадків розраховуються відповідні загальні об'єми

$$V_i = 0, 1, \dots, [V], \quad (6)$$

а також сумарна відносна корисність  $u_i x_i$ , який підсумовується з відносною корисністю на попередньому етапі (від уже завантажених вантажів)  $L_{i+1}(V_{i+1})$ .

Ця формула застосовується для першого етапу, коли  $L_{i+1}(V_{i+1}) = 0$ .

Залежність (6) для наступних етапів: завантажений на  $i$ -му етапі об'єм дорівнює різниці того об'єму, що вийшов,  $V_i$  і наявного раніше об'єму  $V_{i+1}$ , тобто завантажений об'єм

$$V_i - V_{i+1} = v_i x_i, \quad (7)$$

звідки

$$V_{i+1} = V_i - v_i x_i \quad (8)$$

Тоді рекурентна формула матиме вигляд:

$$L_i(V_i) = \max \{u_i x_i + L_{i+1}(V_i - v_i x_i)\}, i = n, n-1, \dots, 1 \quad (9)$$

$$x_i = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{[V]}{v_i} \right\rfloor$$

$$V_i = 0, 1, \dots, [V]$$

Отже, на кожному  $i$ -му етапі в розгляді беруть участь дані цього етапу. Характерною рисою динамічного програмування є рекурентність формул.

Розглянемо приклад застосування моделі.

Фургон загального призначення *Hyundai Porter* має внутрішній об'єм кузова  $[V]$  7,5 м<sup>3</sup>. Його використовують для перевезення вантажів трьох видів ( $n = 3$ ). Кожен  $i$ -ий вид вантажу характеризується об'ємом  $v_i$  та відносною корисністю перевезення одиниці вантажу цього виду  $u_i$ , де  $i = 1, 2, 3$ .

Задача полягає в тому, щоб знайти найкраще поєднання кількості вантажів, що перевозяться для отримання максимальної сумарної відносної корисності.

Вихідні дані для вантажів наведено у табл. 1.

Таблиця 1

#### Вихідні дані

Вид вантажу $i$	Об'єм одиниці вантажу $v_i$ , м <sup>3</sup>	Відносна корисність перевезення одиниці вантажу $u_i$
1	2	1
2	3	0,75
3	1,5	0,8

Оскільки йдеться про цілі неподільні вантажі, то об'єми  $V_i$  можуть набувати лише дискретних значень. У разі сипучих (навалочних) вантажів задача перетворюється на звичайну безперервну задачу лінійного програмування.

Розв'язання задачі формально починається з останнього етапу (так виконується нумерація видів вантажів).

Розглянемо завантаження вантажів 3-го виду. Поки що жодні інші вантажі не завантажені. Перевіримо можливість завантаження тільки вантажами 3-го виду. Максимальна кількість вантажів 3-го виду, які помістяться в кузов, становить

$$x_3 = \left\lfloor \frac{[V]}{v_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{7,5}{1,5} \right\rfloor = 5.$$

Тому можливі варіанти завантаження:  $x_3 = 0$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_3 = 4$ ,  $x_3 = 5$ .

Варіант  $x_3 = 0$  означає, що вантаж 3-го виду взагалі не завантажуються.

Варіант  $x_3 = 5$  означає, що завантажуються лише вантаж 3-го виду.

Інші варіанти припускають, що поряд з вантажами 3-го виду завантажуватимуться вантажі інших двох видів.

Оскільки розглядається третій етап, об'єм  $V_3 = v_3 x_3$  (на інших етапах враховуватимуться інші види вантажів, якщо такі з'являться).

Наступні рівняння використовуються для перебору варіантів на цьому етапі:

$$L_3(V_3) = \max_{x_3=0,1,\dots,5} \{u_3 x_3\} =$$

$$= \max_{x_3=0,1,\dots,5} \{0,8x_3\} =$$

$$= \max_{x_3=0,1,\dots,5} \{0; 0,8; 1,6; 2,4; 3,2; 4\}$$

$$\max \{x_3\} = \max \{0,1,2,3,4,5\} = 5$$

Усі розрахунки можна подати у вигляді табл. 2.

Таблиця 2

#### Розрахунок оптимального рішення

$V_3$	$u_i x_i = 15x_i$						Оптимальне рішення	
	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$	$x_3 = 0$	$L_3(V_3) = \max \{ \}$	$x_3^*$
$l$	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	0	0,8	–	–	–	–	0,8	1
2	0	0,8	1,6	–	–	–	1,6	2
3	0	0,8	1,6	2,4	–	–	2,4	3
4	0	0,8	1,6	2,4	3,2	–	3,2	4
5	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4	5

Тут  $x_3^*$  – можливі оптимальні рішення.

Стовпець 1 заповнюється як послідовність варіантів завантаження.

Значення в стовпцях з 2 по 7 розраховуються за формулою  $0,8x_i$ , у кожному стовпці з 2 по 7 наводяться ті самі значення, оскільки розглядається початковий етап, і до нього ще нічого не

було завантажено. Прочерки означають, що наведені вище варіанти завантаження відсутні.

У стовпці 8 записані максимальні значення з наведених у відповідних рядках. У стовпці 9 записані відповідні значення  $x_3$ .

Аналогічно виконуються етапи 2 і 1.

## Висновки

В роботі виконано розробку математичної моделі задачі про оптимізацію розміщення вантажів (або про завантаження) в обмеженому об'ємі із застосуванням методів динамічного програмування і теорії систем. До характерних особливостей таких задач можна віднести можливість поділу загального процесу на етапи, на кожному етапі є можливість прийняття рішення щодо розвитку процесу на даному етапі тобто, керованість процесу, багатоваріантність рішення, адитивність цільової функції (критерію ефективності), який являє собою суму часткових критеріїв, отриманих на кожному з етапів.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Жилінков О. О., Березовий М. І. Алгоритм розрахунку схем розміщення трубноної продукції різного сортаменту в кузові автотранспортних засобів. *Транспортні системи та технології перевезень*: збірник наукових праць ДНУЗТ ім. акад. В. Лазаряна. 2019. № 17. С. 11–17.
2. Грицюк П. М., Джоші О. І., Гладка О. М. Основи теорії систем і управління: навч. посіб. Рівне: НУВГП, 2021. 272 с.
3. Вовк Ю. Я., Вовк І. П. Основи теорії транспортних процесів і систем. Навчальний посібник. курс лекцій). Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2021. 104 с.
4. Математичні методи дослідження операцій: підручник / С. А. Лавров та ін. Суми: Сумський державний університет, 2017. 212 с.
5. Глушик М. М., Телесницька Н. М. Дослідження операцій. Львів: «Новий світ – 2000», 2020. 368 с.
6. Кузькін О. Ф., Лашених О. А., Турпак С. М. Прикладні задачі дослідження операцій в транспортних системах: навчальний посібник. Запоріжжя: ЗНТУ, 2013. 371 с.
7. Турченко М. О., Кірічок О. Г., Швець М. Д., Кристопчук М. Є. Проектування транспортно-складських комплексів: Навчальний посібник. Рівне: НУВГП, 2014. 190 с.
8. Вікович І. А., Грицунь О. М., Бура Р. Р. Проектування транспортно-складських комплексів: посібник. Львів: Растр-7, 2022. 345 с.
9. Вантажознавство та схоронність вантажів: конспект лекцій / А. Л. Кравець, В. І. Шевченко, А. М. Киманта ін. Харків: УкрДУЗТ, 2020. Ч. 1. 58 с.
10. Вантажознавство та схоронність вантажів: Конспект лекцій / В. М. Запара, Я. В. Запара, А. Л. Кравець та ін. Харків: УкрДУЗТ, 2023. Ч. 2. 68 с.
11. Вантажознавство: підручник / Т. Ю. Габрієлова, Н. Т. Гринів, Є. П. Литвиненко та ін. Київ: Кондор, 2023. 180 с.
12. Загорянський В. Г. Розробка практичної методики застосування експертних методів теорії систем при дослідженнях транспортного процесу. *Центральноукраїнський науковий вісник. Технічні науки*. 2023. Вип. 8(39), ч. І. С. 170–175.
13. Kroemer, Karl H.E (2017). *Ergonomic Design for Material Handling Systems*. CRC Press. P. 125.

Надійшла до редколегії 14.07.2024.

Прийнята до друку 27.08.2024.

V. ZAHORIANSKYI, M. MOROZ, S. KOROL

## OPTIMIZATION OF LOADING AND UNLOADING WORKS AND PLACEMENT OF TARED AND PIECE CARGOES IN VEHICLES AND WAREHOUSES USING THE METHODS OF ERGONOMICS AND THEORY OF SYSTEMS

**Purpose.** The tasks of optimizing the placement of tared and piece cargoes (or the task of loading) in a limited volume (capacity) are typical for cases of loading with tared and piece cargoes (mainly large-sized) of transport containers, car bodies, ship holds in the merchant fleet, transport aircraft, railway wagons, areas of the warehouse complex. At the same time, the safe and efficient performance of loading and unloading operations with tared and piece cargoes, including large-sized ones, in a limited space is directly related to taking into account the requirements and using ergonomic methods. The purpose of this paper is to develop a mathematical model for the optimization of the placement of tared and piece cargoes (or about loading) in a limited volume (capacity), which is used to select a subset of cargo units with the maximum relative utility, while observing the limit on the total volume (or mass) of cargo.

**Methods.** The analysis of literary sources made it possible to establish that for modeling and solving the problem of optimizing the placement of cargo (or loading) in a limited volume (capacity), it is rational to use one of the exact solution methods (dynamic programming method), the number of stages of which is the number of types of cargo. The work uses the method of dynamic programming, methods of theory of systems, and linear optimization. **Results.** The article presents a mathematical model of the problem of optimal placement of tared and piece cargoes (or about loading) in a limited volume, and for the case of placing weapons, ammunition, weapons, it is proposed to maximize not the function of the total cost (value) of the cargo, but the function that would take into account the relative usefulness of each cargo. The relative usefulness of each cargo is proposed to be determined by expert methods of systems theory, for example, the Delphi method, which is well formalized and suitable for computer processing of results.

**Scientific novelty.** The scientific novelty consists in the development of a mathematical model that allows solving the problem of optimal placement of container loads (or loading) in a limited volume, and the target function of the optimization model is proposed to be the total relative usefulness of the cargo. **Practical significance.** Defined ergonomic requirements for cargo operations with tared and piece cargoes in a limited space (vehicles, warehouses). A method of numerical calculation based on the model is proposed (the case of loading a car body with tared and piece cargoes). In further research, the obtained results will be used for computer simulation according to the developed model using the Solver tool of Microsoft Excel.

*Keywords:* dynamic programming, theory of systems, ergonomic, tared and piece cargoes, loading and unloading works, placement, optimization model, container, warehouse complex.